Ilorazy różnicowe

Definicja. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $h \neq 0$ definiujemy operator ilorazu różnicowego

$$T_h^i u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

Jeśli $u \in L^p(\Omega)$, to $T_h^i u$ jest dobrze określone jedynie na mniejszym obszarze

$$\Omega_h := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > |h|\};$$

przyjmiemy więc przedłużenie zerem do funkcji $T_h^i u \in L^p(\Omega)$.

Zadanie 1. Jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz $1 \leqslant p < \infty$, to $\|T_h^i\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$.
Wskazówka. Skorzystać z charakteryzacji ACL lub gęstości funkcji gładkich.

Zadanie 2. (dyskretne całkowanie przez części) Jeśli $u \in L^p(\Omega)$ i $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, to

$$\int_\Omega T_h^i u \cdot \varphi = \int_\Omega u \cdot T_h^i \varphi$$

dla dostatecznie małych h.

Zadanie 3. Wykazać, że norma L^p $(1 < p < \infty)$ jest słabo półciągła z dołu. Innymi słowy, jeśli $u_k \rightharpoonup u$ w $L^p(\Omega)$, tzn.

$$\int_\Omega u_k v \to \int_\Omega uv \quad \text{dla każdego } v \in L^q(\Omega),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\Omega)}$.
Wskazówka. Dla ustalonego u istnieje $v \in L^q(\Omega)$ o normie 1, dla którego $\int uv = \|u\|$.

Zadanie 4. Jeśli $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ oraz normy $\|T_h^i\|_{L^p(\Omega)}$ są wspólnie ograniczone dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz dostatecznie małych h, to $u \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \liminf_{h\to 0} \|T_h^i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia Banacha-Alaoglu i wykazać, że granicą $T_h^i u$ jest $\partial_i u$.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{M}$ będzie operatorem maksymalnym Hardy'ego Littlewooda. Wykazać, że dla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ i $1 < p < \infty$ mamy $\mathcal{M}u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Wskazówka. Operator $\mathcal{M}$ komutuje z operatorem przesunięcia $u(\cdot) \mapsto u(\cdot + he_i)$. Warto pamiętać też, że jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 6. Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie ustaloną funkcją gładką, a $A \in C^\infty(\mathbb{R}^n, M_{n\times n})$ formą kwadratową o gładkich współczynnikach, spełniającą warunek jednostajnej eliptyczności ze stałymi $0 < \lambda < \Lambda < \infty$:

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant A_x(\xi,\xi) \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Załóżmy, że funkcja $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ jest słabym rozwiązaniem równania

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{w } \mathbb{R}^n,$$

to znaczy

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_x(\nabla u(x), \nabla\varphi(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{dla } \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \text{ o zwartym nośniku.}$$

Wykazać, że $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję testową $\varphi = T^i_{-h}(\eta^2 T^i_h u)$, gdzie η jest ustaloną funkcją wycinającą.

Zadanie 7. Wykazać, że $\partial_i u$ spełnia zróżniczkowane równanie

$$-\operatorname{div}(A\nabla\partial_i u) = \partial_i f + \operatorname{div}(\partial_i A\nabla u) \quad \text{w } \mathbb{R}^n.$$

Iterując rozumowanie, wykazać $u \in W^{k,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i w konsekwencji gładkość u.
Wskazówka. W poprzednim równaniu wybrać $\varphi = T^i_{-h}\psi$, gdzie $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ jest dowolną funkcją testową.